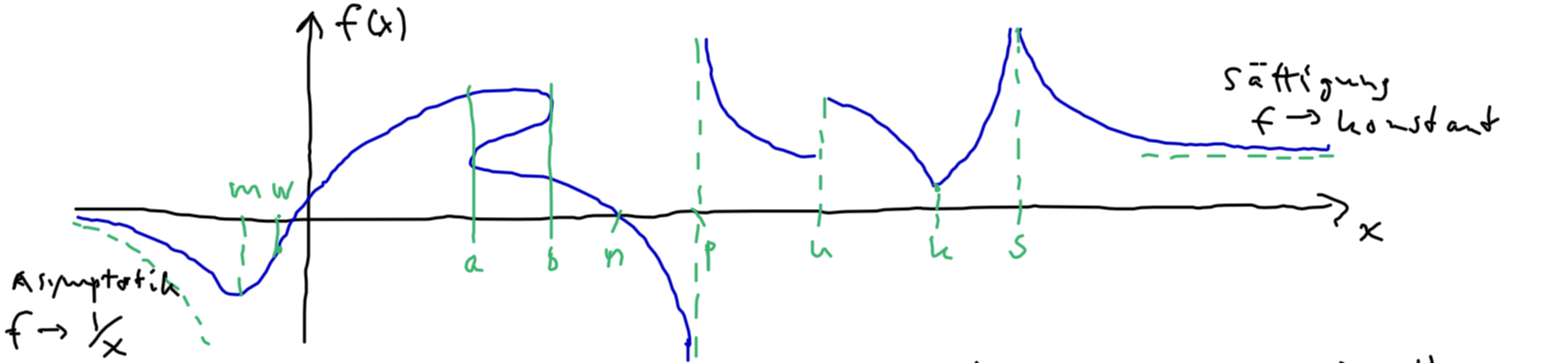
V. Funktionen

V.1 Allgemeines

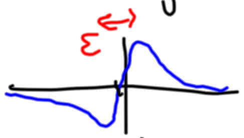
Funktionen sind Abbildungen, in der Regel zwischen Kontinua

einfachster Fall: $f: \mathbb{R} \supseteq D \longrightarrow W \subseteq \mathbb{R}$ „von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$"

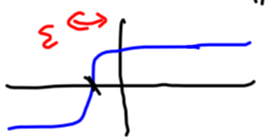


m Minimum, w Wendepunkt, [a,b] mehrdeutig, n Nullstelle,
p Pol (einfacher), u Sprungstelle, k Knick, s Singularität

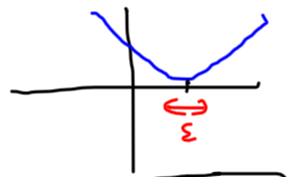
pathologische Stellen sind „in der Natur" bei höherer Auflösung regulär:



$$\frac{\alpha\,(x-p)}{(x-p)^2+\varepsilon^2}$$



$$\frac{h}{2}\;\frac{x-u}{\sqrt{(x-u)^2+\varepsilon^2}}$$



$$\sqrt{(x-k)^2+\varepsilon^2}$$

$$\frac{\gamma^2}{(x-s)^2+\varepsilon^2}$$

• Verwandte Funktionen: aus gegebenen Funktionen f gewinne

- $f_1(x) = f(-x)$ an y-Achse gespiegelt
- $f_2(x) = -f(x)$ an x-Achse gespiegelt
- $f_3(x) = -f(-x)$ im Ursprung gespiegelt
- $f_4(x) = f(x-a)$ um a nach <u>rechts</u> verschoben
- $f_5(x) = f(x) + b$ um b nach <u>oben</u> verschoben
- $f_6(x) = f(c \cdot x)$ mit $\frac{1}{c}$-facher x-Stauchung
- $f_7(x) = d \cdot f(x)$ mit d-facher y-Streckung

Graph

gerade Funktion: $f(-x) = f(x)$ Bsp.: $\frac{1}{1+x^2}$

ungerade Funktion: $f(-x) = -f(x)$ Bsp.: $\tan x$

• zum Entfernen physikalischer Dimensionen

Funktion $z(t)$, t & z haben Dimension. Typische Konstanten t_0, z_0

definiere $f = z/z_0$, $\tau = t/t_0$ dim'los $\rightsquigarrow$ $z(t) = z_0 f(\tau = t/t_0)$

Bsp. freier Fall: $z(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$. Natürlich ist $z_0 = h$, $t_0 = \sqrt{h/g}$

$\rightsquigarrow$ $z(t) = h \cdot f(\tau)$ mit $f(\tau) = 1 - \frac{1}{2}\tau^2$. Newton: $f'' = -1$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$

Umkehrfunktionen

f^{-1} definiert über $f^{-1}(\overbrace{f(x)}^{y}) = x$ (5.1) oder $f(\overbrace{f^{-1}(y)}^{x}) = y$

$x \overset{f}{\longmapsto} y \overset{f^{-1}}{\longmapsto} x$ $\qquad$ $y \overset{f^{-1}}{\longmapsto} x \overset{f}{\longmapsto} y$

Graph von f^{-1} aus Graph von f durch Spiegelung an Diagonalen $y = x$

Die Ableitung von f^{-1} erhält man aus der Ableitung von f!

$$\partial_x \left[f^{-1}(\underbrace{f(x)}_{y}) = x \right] \overset{\text{Kettenregel}}{\curvearrowright} \partial_y f^{-1}(y) \cdot \partial_x f(x) = \partial_x x = 1$$

also: $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ oder $\dfrac{dx}{dy} = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^{-1}$ (5.2)

Beispiele:

A) $f(x) = x^2 = y \rightsquigarrow f^{-1}(y) = \sqrt{y} = x$ ← positive Ast

Teste (5.2): $\partial_y \sqrt{y} = \dfrac{1}{(\partial_x x^2)\big|_{x=\sqrt{y}}} = \dfrac{1}{(2x)\big|_{x=\sqrt{y}}} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$ ✓

B) $f(x) = \sin x = y \rightsquigarrow f^{-1}(y) = \arcsin y = x$

Anwendung von (5.2):

$$\partial_y \arcsin y = \frac{1}{(\partial_x \sin x)\big|_{x=\arcsin y}} = \frac{1}{(\cos x)\big|_{x=\arcsin y}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}\,\big|_{x=\arcsin y}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

V.2 Exponentialfunktion

beschreibt alle Wachstumsvorgänge, wenn: Mengenänderung ist proportional zur Menge selbst

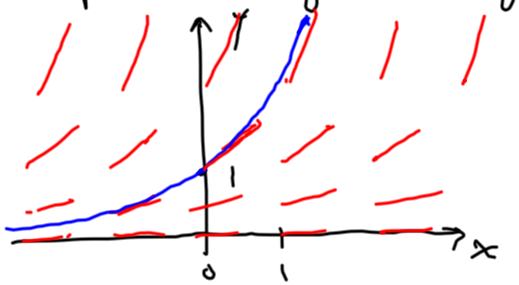
etwa: Bakterien-Anzahl $N(t)$ nehme zu nach $\dot N = \alpha N$

AW: $N(0) = N_0$ gegeben $\overset{N = N_0 \cdot f}{\rightsquigarrow}$ $\frac{1}{\alpha}\partial_t(\cancel{N_0} f) = \cancel{N_0} f$

mache t dim'los: $x = \alpha t$, $f = f(x)$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{f'(x) = f(x), \quad f(0) = 1}$ (5.3)

Def.: $\exp(x)$ löst die Dgl. (5.3) mit AW

Graph: trage Steigung am Punkt (x,y) ein:



exp monoton steigend, $D = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}_+$

exp immer positiv ($f(x_0) = 0 \rightsquigarrow f(x) = 0$)

$\lim_{x \to \infty} \exp(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$

Funktionalgleichung: betrachte Hilfsfunktion $g(x) = \exp(x+z)$

$g'(x) = \exp(x+z) = g(x)$, aber $g(0) = \exp(z)$, also: (5.4)

$g(x) = g(0) \cdot \exp(x) = \exp(z) \cdot \exp(x) \rightsquigarrow \exp(x+z) = \exp(x) \cdot \exp(z)$

Iteration von (5.4):

$$\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \left[\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2$$

$$\left.\begin{array}{l} \exp(x) = \exp\left(\frac{x}{n}+\frac{x}{n}+\dots+\frac{x}{n}\right) = \left[\exp\left(\frac{x}{n}\right)\right]^n \\ \exp(1) = \left[\exp\left(\frac{1}{m}\right)\right]^m \underset{m=\frac{n}{x}}{=} \left[\exp\left(\frac{x}{n}\right)\right]^{\frac{n}{x}} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \exp(x) \\ = [\exp(1)]^x \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ $\exp(x) = e^x$ mit $e := \exp(1) \approx 2.71828\dots$ Euler-Zahl
(5.5)

$$\rightsquigarrow \exp(-x) = e^{-x} = 1/e^x = \frac{1}{\exp(x)}$$

$$\rightsquigarrow \partial_x e^x = e^x \rightsquigarrow \partial_x^2 e^{\pm x} = e^{\pm x}, \quad \partial_x^n e^{\gamma x} = \gamma^n e^{\gamma x} \quad (5.6)$$

Reihe:

versuche $f' = f$ per Polynom-Ansatz zu lösen:

$$f \overset{?}{=} 1 + c_1 x + c_2 x^2 \rightsquigarrow f' = \underline{c_1} + \underline{2c_2 x} \overset{!}{=} \underline{1} + \underline{c_1 x} + \underline{c_2 x^2}\,? \rightsquigarrow \text{geht nicht}$$

$\rightsquigarrow$ addiere beliebig viele Potenzen, d.h. Polynom $\Rightarrow$ Potenzreihe

$$f(x) \overset{?}{=} 1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (c_0 = 1)$$

einsetzen:

$$f' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \dots$$
$$\overset{!}{=} 1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots = f$$

Koeffizientenvergleich: $n c_n = c_{n-1} \rightsquigarrow c_n = \frac{c_{n-1}}{n}$

Rekursion

eleganter:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n \underline{x^{n-1}} \overset{!}{=} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \overset{m=n-1}{=} \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} \underline{x^{n-1}} = f$$

Lösung: $c_n = \frac{1}{n} c_{n-1} = \frac{1}{n(n-1)} c_{n-2} = \frac{1}{n(n-1)(n-2)} c_{n-3} = \dots$

$$= \frac{1}{n!} c_0 = \frac{1}{n!}$$

$0! := 1$

also: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ (5.7)

Test: $\partial_x e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} \overset{n=m+1}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} x^m = e^x$ ✓

Konvergenz? überall, d.h. $\forall x \in \mathbb{R}$

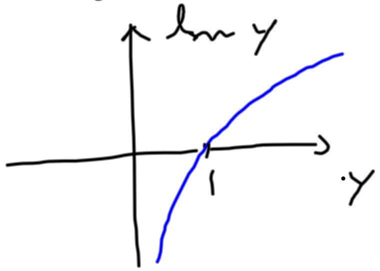
Asymptotik: $\lim_{x \to \infty} x^{-n} e^x = \infty \iff \lim_{n \to \infty} x^n e^{-x} = 0$ (5.8)

Produktdarstellung: $e^x = (e^{x/n})^n \overset{\frac{x}{n} = \varepsilon}{=} (e^{\varepsilon})^n \approx (1+\varepsilon)^n = (1+\frac{x}{n})^n$

$$\rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x \qquad (5.9)$$

Umkehrfunktion: $f^{-1}(y) = \ln y$ zu $y = f(x) = e^x$

Eigenschaften: $e^{\ln x} = x \,,\quad \ln e^x = x \qquad (5.10)$



ln y definiert nur für $y>0$

$$\partial_y \ln y = \frac{1}{(\partial_x e^x)\big|_{x=\ln y}} = \frac{1}{e^x\big|_{x=\ln y}} = \frac{1}{y}$$

$$\ln(xy) = \ln\left(e^{\ln x}e^{\ln y}\right) = \ln\left(e^{\ln x+\ln y}\right)$$
$$= \ln x + \ln y$$

$$\ln(x^a) = \ln\left(e^{a\ln x}\right) = a\ln x$$

$$\partial_x a^x = \partial_x\left(e^{x\ln a}\right) = \ln a\cdot e^{x\ln a} = \ln a\cdot a^x$$

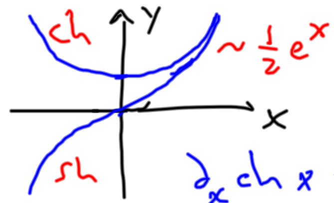
$$\ln\frac{1}{x} = -\ln x\,,\quad \lim_{x\to 0} x\ln x = 0\,,$$

$$\lim_{x\to\infty}\ln x = \infty\,,\quad \lim_{x\to 0}\ln x = -\infty$$

verwandte Funktionen:

$\cosh x \equiv \mathrm{ch}\, x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ gerade

$\sinh x \equiv \mathrm{sh}\, x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ ungerade



(5.11)

$\partial_x \mathrm{ch}\, x = \mathrm{sh}\, x$

$\partial_x \mathrm{sh}\, x = \mathrm{ch}\, x$

Eigenschaften: $\mathrm{ch}\,x + \mathrm{sh}\,x = e^x\,,\quad \mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1\,.$

V.3 Potenzreihen

Exp.-Funktion war Beispiel einer Potenzreihe

Def.: Potenzreihe ist formale Summe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n =: p_\infty(x)$

Eigenschaften:

- Konvergenz? falls $\left| \sum_{n=k}^{l} c_n x^n \right| < \varepsilon$ für $\forall\, k, l > N(\varepsilon)$
- Approximation einer Funktion $f(x)$ [sogar ohne Konvergenz]

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n x^n + R_{N+1}(x)$$

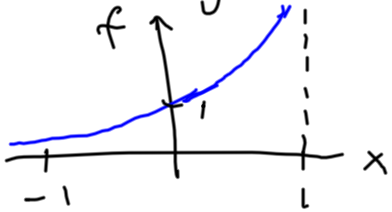
nur gut falls $f(x)$ nicht pathologisch bei $x=0$

Restglied von $O(x^{N+1})$

- Darstellung einer Funktion über Potenzreihenansatz, z.B. für Lösen von Differentialgleichungen.

zweites wichtiges Beispiel: geometrische Reihe

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$



erfinde Gleichung für diese Fktn

a) $f'(x) = \frac{-1}{(1-x)^2} \cdot (-1) = \frac{1}{(1-x)^2} \rightsquigarrow (1-x)\, f'(x) = f(x)$

mit $f(0) = 1$

b) $f(x) = \frac{1}{1-x} \rightsquigarrow (1-x)\, f(x) = 1$ algebraisch

setze Potenzreihenansatz $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ein!

in b) $1 = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n x^n - c_n x^{n+1})$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - \sum_{p=0}^{\infty} c_p x^{p+1} \underset{p+1=n}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n - c_{n-1}) x^n$$

Koeffizientenvergleich: $1 = c_0$, $0 = c_n - c_{n-1}$ für $n \geq 1 \rightsquigarrow c_n = 1 \;\forall n$

Ergebnis: $\frac{1}{1-x} \underset{(5.12)}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konv. für $|x| < 1$

Approximation $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^N + R_{N+1}(x)$

Restglied durch „Abspalten":

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x \cdot \underbrace{\frac{1}{1-x}} = 1 + x \cdot \left(\underbrace{1 + x \cdot \frac{1}{1-x}}\right) = \ldots$$

$$= 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^N + \frac{x^{N+1}}{1-x}$$

$$\rightsquigarrow \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{N+1}}{1-x} = \frac{1-x^{N+1}}{1-x} \qquad (5.13)$$

Tricks, wie man sich Potenzreihenentwicklungen barstellt:

- Einsetzen:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$$

- Umformen: $\sqrt{1+x} = \sum_n c_n x^n$

$$1 + x = \sqrt{1+x}^2 = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots)(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots) = c_0^2 + 2c_0 c_1 x + (2c_0 c_2 + c_1^2) x^2 + \ldots$$

Vergleich: $1 = c_0^2$, $1 = 2c_0 c_1$, $0 = 2c_0 c_2 + c_1^2$ $\rightsquigarrow$ $c_0 = 1$, $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = -\frac{1}{8}$, ...

- Differenzieren $\ln(1+x) = ?$

$$\partial_x \ln(1+x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{m=0}^{\infty} (-x)^m = \partial_x \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m+1} (-1)^m x^{m+1} + \text{konst} \right)$$

konst? $\ln(1+0) = 0 = \text{konst}.$

also: $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \dots$ (5.14)

- Addition

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{x^n}{n!} + \frac{(-x)^n}{n!} \right) = \sum_{n \text{ gerade}} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

$\operatorname{sh} x$ analog oder $\partial_x \operatorname{ch} x \rightsquigarrow \operatorname{sh} x = \sum_{n \text{ ungerade}} \frac{x^n}{n!} = x + \dots$

- Differentialgleichungen

$f'' + f = 0$ mit AW $f(0)=1$, $f'(0)=0$. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \underset{m=n-2}{=} \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^{n-2}$$

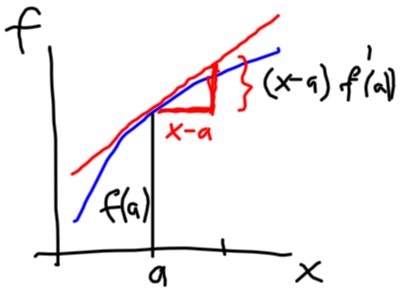
$$= \sum_{n=2}^{\infty} [c_n n(n-1) + c_{n-2}] x^{n-2} \rightsquigarrow c_n = -\frac{c_{n-2}}{n(n-1)}. \text{ AW: } c_0 = 1, c_1 = 0$$

$\rightsquigarrow c_{\text{ungerade}} = 0$, $c_n = \pm \frac{1}{n!}$ (n gerade) $\rightsquigarrow 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \cos x$ (5.15)

Taylor-Reihe

Wir kennen lineare Approximation von $f(x)$ bei $x=\bar{x}$

$$f(x=\bar{x}+\varepsilon) = f(\bar{x}) + \varepsilon\cdot f'(\bar{x}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$



benenne um: $\bar{x}\to a$, $\varepsilon = x-a$

$$f(x) = f(a) + (x-a)\cdot f'(a) + \mathcal{O}((x-a)^2)$$

besser: parabolische Approximation

$$f(x) = f(a) + (x-a)\cdot f'(a) + (x-a)^2\cdot \underline{g(a)} + \mathcal{O}((x-a)^3)$$

differenziere:

$$f'(x) = 0 + 1\cdot f'(a) + 2(x-a)\cdot g(a) + \mathcal{O}((x-a)^2)$$

$$f''(x) = 0 + 2\cdot g(a) + \mathcal{O}(x-a)$$

$$\rightsquigarrow \quad g(a) = \frac{1}{2} f''(a)$$

allgemein:

$$\begin{aligned}
& & & \underline{x=a} \\
f(x) &= f(a) + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \dots & \longrightarrow\ & f(a) \\
f'(x) &= 0 + c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \dots & \longrightarrow\ & c_1 \\
f''(x) &= 0 + 2c_2 + 6c_3(x-a) + 12c_4(x-a)^2 + \dots & \longrightarrow\ & 2c_2 \\
f'''(x) &= 0 + 6c_3 + 24c_4(x-a) + \dots & \longrightarrow\ & 6c_3
\end{aligned}$$

also: $f^{(n)}(a) = n!\, c_n \rightsquigarrow c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \rightsquigarrow$

n-te Ableitung

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)\,(x-a)^n$$ Taylor-Reihe (5.16)

oder

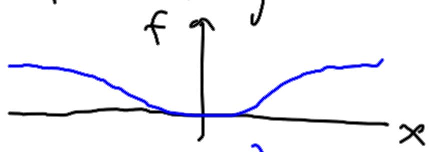
$$f(a+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)\cdot h^n = \left(e^{h\partial_x} f\right)(a)$$ (5.16')

Abbruch bei $n=N$ $\Leftrightarrow$ Approx. von f durch Polynom N-ten Grades

Voraussetzung: $f \in C^\infty$ („hinreichend glatt")

geht nicht immer! Gegenbeispiel:

$f(x) = e^{-c/x^2}$



$f^{(n)}(x) = \mathrm{poly}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot e^{-c/x^2} \xrightarrow{x\to 0} 0 \quad \forall n$

Taylorreihe $\equiv 0$

oft nützlich, z.B. $f(x) = (1+x)^\lambda = 1 + \lambda x + \frac{1}{2}\lambda(\lambda-1)x^2 + \ldots$ (5.17)

oft benutzt: harmonische Näherung für Teilchen nahe V-Minimum $(x=a)$

$$V(x) = V(a) + \cancel{V'(a)\cdot(x-a)} + \frac{1}{2}V''(a)(x-a)^2 + \mathcal{O}((x-a)^3)$$

$V'(a) = 0 \Leftrightarrow$ Minimum

$\omega^2 = V''(a)/m$ (5.18)

$$m\ddot{x} = -\partial_x V = -V''(a)\cdot(x-a) + \mathcal{O}((x-a)^2) = -m\omega^2(x-a) + \ldots$$ Hooke

V.4 Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

Körper-Erweiterung der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ um die Lösungen von

$x^2+1=0$. Nenne $\sqrt{-1} =: i$ „imaginäre Einheit"

also: $i \cdot i = -1$ (5.19)

komplexe Zahlen = Paare von reellen Zahlen (x,y)

= Linearkombination von 1 & i:

$$z = x \cdot 1 + y \cdot i = x + iy$$

Realteil $\mathrm{Re}(x+iy) = x$ Imaginärteil $\mathrm{Im}(x+iy) = y$

z heißt reell wenn $y=0$, imaginär wenn $x=0$

Addition: $(x+iy)+(u+iw) = (x+u)+i(y+w)$

Multiplikation: $(x+iy)\cdot(u+iw) = (xu-yw)+i(xw+yu)$

Negatives: $-(x+iy) = -x-iy$ Null: $z=0 \Leftrightarrow x=y=0$

Inverses: $\dfrac{1}{x+iy} = \dfrac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \dfrac{x}{x^2+y^2} - i\,\dfrac{y}{x^2+y^2}$ Körper: $z \cdot w = 0$

$\Leftrightarrow z=0 \vee w=0$

Wurzeln

$\sqrt{x+iy} = u+iw$ mit $u = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2+y^2})}$, $w = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(-x+\sqrt{x^2+y^2})}$

löst $(u+iw)^2 = x+iy \leadsto$ jede komplexe Zahl hat 2 Wurzeln

Hauptsatz der Algebra:

Jedes Polynom n-ten Grades in $\mathbb{C}$ hat n Nullstellen
(mit Multiplizität)

Konjugation: involutive Abbildung $i \longmapsto -i$ d.h.

$z = x+iy \longmapsto x-iy =: z^*$ oder $\bar{z}$

$\leadsto$ $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z+z^*)$, $\mathrm{Im} = \frac{1}{2i}(z-z^*)$ (5.20)

$\leadsto$ z reell $\Leftrightarrow$ $z = z^*$ Involution: $(z^*)^* = z$

$\leadsto$ $(z+w)^* = z^* + w^*$, $(z \cdot w)^* = z^* \cdot w^*$

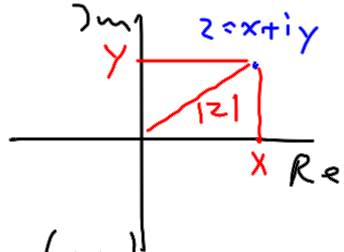
Betrag (Norm, Absolutwert): $z \cdot z^* = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2$

$|z| := \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0$ (5.21)

$\leadsto$ $|z| = |z^*| = |-z|$, $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$, $|z+w| \leq |z| + |w|$

geometrische Darstellung

$z \doteq (x,y)$ in $\mathbb{R}^2$ „komplexe Ebene“



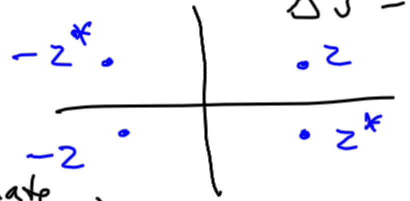
Betrag $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ Länge des Zeilenvektors (x,y)

$\rightsquigarrow$ $|z-w|$ = Abstand (z,w)

$|z+w| \le |z|+|w|$

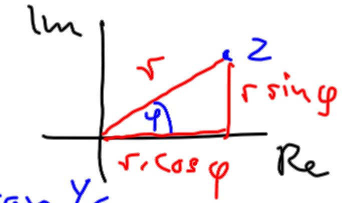
Δs-Ungleichung

Spiegelung an Achsen



Addition ist vektoriell

Produkt? Polarkoordinaten:



$$z = x+iy = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\,(c+is)$$

mit $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ und $\varphi =: \arg(z) = \arctan y/x \mod 2\pi$

(5.2.2)

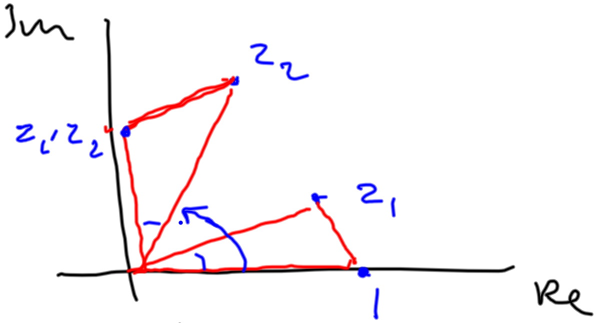
$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \cdot (c_1+is_1)\cdot(c_2+is_2) = r_1 r_2 \left([c_1c_2 - s_1s_2] + i\,[s_1c_2 + s_2c_1]\right)$$

$$= \underline{r_1 r_2}\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$$

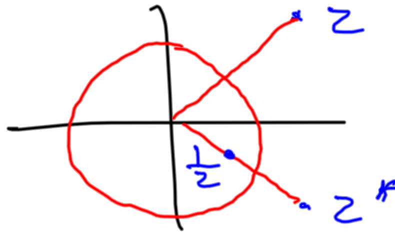
(5.23)

also: $|z_1 z_2| = |z_1|\cdot|z_2| = r_1 r_2$ und $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

geometrisch



Inverses



$$\frac{1}{z} = \frac{z^*}{|z|^2}$$

Multiplikation mit i = Drehung um $\pi/2$ $(90°)$

Konsequenz:

$$z^n = r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$ Moivre

schnelle Methode, um $\cos n\varphi$ & $\sin n\varphi$ zu berechnen

z.B. $r=1$, $\cos n\varphi = \mathrm{Re}(z^n) = \mathrm{Re}([\cos\varphi + i\sin\varphi]^n)$

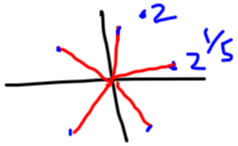
m-te Wurzel: $\sqrt[m]{z} = w \Leftrightarrow z = w^m$

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho^m(\cos m\theta + i\sin m\theta) \rightsquigarrow$

$\rho^m = r$, $m\theta = \varphi \rightsquigarrow \rho = \sqrt[m]{r}$, $\theta = \frac{\varphi}{m} + 2\pi\frac{k}{m}$ mit $k = 0, 1, \ldots, m-1$

z.B. $\sqrt[5]{2}$



5 Lösungen

Exponentialfunktion:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$ für $z \in \mathbb{C}$ existiert,

wähle $z = iy$ imaginär

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{1}{2!}(iy)^2 + \frac{1}{3!}(iy)^3 + \frac{1}{4!}(iy)^4 + \dots$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2!}y^2 + \frac{1}{4!}y^4 \mp \dots\right) + i\left(y - \frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{5!}y^5 \mp \dots\right)$$

$$= \cos y + i \sin y$$ Euler (5.24)

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) = \mathrm{ch}(ix)$$

$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) = \frac{1}{i}\mathrm{sh}(ix)$$

$\rightsquigarrow$ $z = r\,e^{i\varphi}$ (5.25) $\rightsquigarrow$ $\left.\begin{array}{l} e^{\pm i\pi} = -1 \\ e^{\pm i\pi/2} = \pm i \end{array}\right\}$ (5.26)